

Examens de maturité 2018

Mathématiques fortes	DF	5B - 5C - 5D	Version A
----------------------	----	--------------	-----------

Exercice 1

Soit la fonction réelle définie par $f(x) = \ln^3(x) - 4 \ln(x)$

1. Effectuer l'étude complète de la fonction f .
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point $A(e, f(e))$.
3. Déterminer l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f , l'axe O_x ainsi que les droites $x = 1$ et $x = 5$.

Exercice 2

1. a. On définit la transformation du plan complexe S associée à la fonction complexe

$$f(z) = (-2 + 2i)z + 3 + 4i$$

Déterminer la préimage de $7 - i$ par f .

- b. On définit de même la transformation T associée à la fonction complexe

$$g(z) = \frac{(-1 - i)z - 1 - 5i}{4}$$

Déterminer les éléments caractéristiques de T .

- c. Déterminer la fonction complexe associée à la transformation $T \circ S$ du plan complexe et la nature géométrique de cette transformation.
 - d. Déterminer l'ensemble M des nombres complexes z tels que $f(z)$ est un imaginaire pur. Interpréter géométriquement l'ensemble M .
2. Résoudre l'équation suivante dans \mathbb{C} sachant que $z_1 = 2 - 3i$ est une des solutions :

$$2z^3 + (7 + 12i)z^2 - (17 - 35i)z - 88 + 41i = 0$$

Exercice 3

Relativement à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, I, J, K)$, on considère

les points $A(-1, 1, 0)$, $B(1, -2, 2)$ et $C(1, 1, -4)$

le plan $\alpha : x - 2y + 2z - 5 = 0$ et la sphère $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8z - 19 = 0$.

1. Posons $\beta = (ABC)$. Montrer que $\beta \perp \alpha$. Déterminer $d = \alpha \cap \beta$.
2. Déterminer le centre D et le rayon ρ du cercle Γ d'intersection de α et Σ .
3. Déterminer l'équation de la sphère Σ' symétrique de Σ relativement au plan α .
4. Déterminer les équations paramétriques des droites du plan α , tangentes à Γ et perpendiculaires à β .

Exercice 4

François a une passion pour les abeilles. Sa femme sait que s'il s'en occupe un jour, il y a deux chances sur trois pour qu'il en fasse de même le lendemain, et même s'il laisse ses abeilles butiner en paix et ne s'en occupe pas un jour, il y a une chance sur cinq pour qu'il s'en occupe le lendemain. De plus, elle a remarqué que lorsqu'il rend visite à ses ruches, François y consacre en moyenne 45 minutes. Ce mercredi pourtant, François a une réunion importante et ne va pas rendre visite à ses abeilles.

1. Quelle probabilité y a-t-il qu'il rende visite à ses abeilles vendredi? samedi?
2. Quelle est la probabilité qu'il s'en occupe exactement deux jours consécutifs entre mercredi et samedi?
3. Quelle est la probabilité qu'il se soit occupé de ses abeilles jeudi sachant qu'il s'en est occupé samedi?
4. Quelle est la probabilité qu'il se soit occupé de ses abeilles samedi sachant qu'il ne s'en est pas occupé jeudi?
5. À quelle durée de visite François doit-il s'attendre sur ces trois jours?

FIN

Bon travail!