Département de l'éducation, de la culture et du sport
Service de l'enseignement
Lycée - Collège des Creusets, Sion

Departement für Erziehung, Kultur und Sport
Dienststelle für Unterrichtswesen
Kollegium Creusets, Sitten

CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2008

MATHÉMATIQUES FORTES	**DF**	**Série B**

Problème 1 : Analyse

On considère la fonction $f \; : \; x \mapsto x \cdot \ln^2(x)$

1. Étudier et représenter graphiquement la fonction *f*.
2. La droite *d* d'équation $y = x$ coupe la courbe représentative Γ de la fonction *f* en deux points *A* et *B* (distincts de l'origine).
   (a) Déterminer les coordonnées de *A* et *B*.
   (b) Montrer qu'en l'un des points, la droite *d* coupe Γ à angle droit. Calculer ensuite l'angle aigu α que forme la courbe Γ avec la droite *d* au second point d'intersection.
   (c) Calculer la valeur exacte de l'aire du domaine délimité par la courbe Γ et la droite *d* entre *A* et *B*.

Problème 2 : Géométrie vectorielle et analytique de l'espace

Dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\right)$, on note :
Σ la sphère de centre $W(-2;-1;0)$, passant par le point $A(0;0;1)$;
π_m le plan d'équation : $(2+m)x + y + mz - 4 + m = 0$ où $m \in \mathbb{R}$;

d la droite définie par la représentation paramétrique : $\begin{cases} x = k \\ y = 2+k \\ z = -1-2k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

1. Écrire l'équation cartésienne de la sphère Σ.
2. Déterminer l'intersection de la droite *d* et de la sphère Σ.

   Quelle est l'équation cartésienne du plan tangent à Σ en chacun des points d'intersection de Σ et *d* ?
3. Montrer que tous les plans π_m, obtenus lorsque *m* décrit $\mathbb{R}$, contiennent une même droite *e* dont on donnera une représentation paramétrique.
4. Déterminer, en fonction de *m*, la distance δ du point *W* au plan π_m. En déduire les valeurs de *m* pour lesquelles le plan π_m est tangent à Σ.

Problème 3 : Probabilités

Durant une séance de penalties, en moyenne, un footballeur gaucher marque 5 fois sur 6 et un droitier 2 fois sur 3. On admet qu'un footballeur sur 10 est gaucher.

1. On choisit au hasard un footballeur et il tire un penalty. Quelle probabilité a-t-il de marquer ?
2. Un deuxième tireur ne marque pas. Quelle est la probabilité qu'il soit gaucher ?
3. Combien doit-on choisir de joueurs, chacun tirant un penalty, pour avoir une probabilité supérieure à 99.99% qu'au moins un tir soit loupé ?
4. Deux équipes s'affrontent à une séance de tirs au but. Si deux joueurs de chaque équipe ont tiré leur penalty, quelle est la probabilité que ces équipes soient à égalité ?
5. Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de tirs marqués sur 3 essais. Calculer son espérance mathématique et son écart-type.
6. A la fin du match, on réunit, pour une photo souvenir, les deux équipes de 6 joueurs dont 1 gardien. Les joueurs se plaçant au hasard sur un rang, quelle est la probabilité que les deux gardiens ne se trouvent pas côte à côte ?

Problème 4 : Nombres complexes

1. Soit la fonction complexe $g(z) = (3-i)z+4+3i$ Déterminer le nombre complexe w tel que $g(w) = w$.

2. Soient les nombres complexes $z_1 = -2+6i$, $z_2 = 4i$ et $z_3 = 0$. Soit la fonction complexe $f(z) = a\bar{z}+b$. Déterminer les nombres complexes a et b pour lesquels les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées : $f(z_1) = z_2$ et $f(z_2) = z_3$.

3. On considère le nombre complexe $u = \dfrac{-4}{1+i}$.
   (a) Montrer que u^8 est réel.
   (b) Mettre sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique le nombre complexe z tel que $u \cdot z = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$.
   (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$.

Fin