

Examens de maturité 2017

Mathématiques Fortes

DF

5B, 5C, 5D

Version A

Problème 1

Soit la fonction donnée par $f(x) = \frac{2\sqrt{\ln(x)}}{x}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f et construire sa représentation graphique.
2. Soit $b > 1$. Calculer le volume $V(b)$ du corps de révolution engendré par la rotation du domaine limité par la courbe représentative de f , l'axe O_x et les droites d'équations $x = 1$ et $x = b$.
3. Déterminer $\lim_{b \rightarrow +\infty} V(b)$.

Problème 2

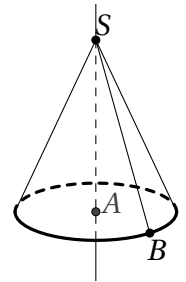
1. (a) On définit une similitude directe de centre $A(1, -2)$, de rapport $\rho = 2\sqrt{2}$ et d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Déterminer la fonction f associée à cette transformation du plan complexe S .
(b) On définit de même la transformation T associée à la fonction complexe donnée par $g(z) = \frac{-1-i}{4}z$. Déterminer les éléments caractéristiques de T .
(c) Déterminer la fonction complexe h associée à la transformation $T \circ S$ du plan complexe.
2. Soit la fonction complexe définie par $p(z) = (1 - i\sqrt{3}) \cdot z - \sqrt{3} - 2i$.
 - (a) Déterminer l'image de $\sqrt{3} - i$.
 - (b) Quels nombres complexes $z = x + yi$ ont une image réelle par la fonction p ? Que représentent-ils dans le plan complexe?
 - (c) Déterminer la préimage de 0.
 - (d) Déterminer l'ensemble M des nombres complexes z tels que $p(z) = \frac{1}{z}$.

Problème 3

Dans l'espace E_3 muni d'un repère orthonormé, on donne la sphère Σ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0$, le plan α d'équation cartésienne $x + y + z - 4 = 0$ et la droite d d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=10-3k \\ y=k \\ z=-9+4k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

- Déterminer le centre W et le rayon R de la sphère Σ .
- Le plan α coupe la sphère en un cercle Γ .
 - Montrer que $A(2; 1; 1)$ est le centre de ce cercle.
 - Déterminer le rayon r de ce cercle.
 - Montrer que $B(0; 2; 2)$ est élément de ce cercle.
- Déterminer les équations cartésiennes des plans π_1 et π_2 de la forme $x + ay + bz + c = 0$ contenant la droite d et tangent à la sphère Σ .
- Soit Ω un cône circulaire droit de sommet $S(4; 3; 3)$ dont l'axe passe par A et dont (BS) est une génératrice.
 - Soit β le plan tangent au cône Ω en B , c'est à dire un plan ayant une droite commune avec ce cône. Montrer que l'équation cartésienne de ce plan est $-x + 2y + 2z - 8 = 0$.
 - Ce plan est-il tangent à la sphère Σ ?



Problème 4

Un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 est donné par sa matrice A relativement à la base canonique.

$$A = \begin{pmatrix} 1+m & -1 & m \\ -1 & 1 & -1 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{où } m \in \mathbb{R}$$

- Pour quelles valeurs du paramètre réel m l'application f est-elle bijective?
- On pose $m = 4$. Donner la dimension et une base du noyau et de l'image de f .
- On pose $m = 1$.
 - Calculer A^2 et A^{-1} .
 - Écrire l'image d'un vecteur $(x; y; z)$ de \mathbb{R}^3 par $f \circ f$ et par ${}^t f$.
 - En déduire la solution de l'équation $f((x; y; z)) = (1; -2; 2)$.

FIN