# Examen de maturité 2019

| Mathématiques Fortes | DF | 5B, 5C, 5D | Version A |
|---|---|---|---|

## Problème 1

Soit la fonction $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction $f$.
2. Déterminer l'aire du domaine non borné compris entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses pour $x \geqslant -1$.

## Problème 2

1. On définit une fonction complexe par $f(z) = (4-4i)z + 5 + 5i$ et on nomme $T_f$ la transformation du plan de Gauss associée.
   (a) Déterminer l'affixe de la préimage du point d'affixe $5 - i$ par $T_f$.
   (b) Déterminer les éléments caractéristiques de $T_f$.
   (c) Soient $M(x, y)$ et $M'(x', y')$, exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$ sachant que $M' = T_f(M)$.
   (d) Où sont situés les points ayant une image par $T_f$ sur l'axe réel ?
2. Déterminer les solutions de l'équation $z^3 = 8 \cdot \dfrac{2 - \sqrt{3} - i - 2i\sqrt{3}}{2 - i}$ puis les représenter dans le plan complexe.

## Problème 3

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne deux plans $\pi_1 : x - 2y + 2z + 15 = 0$ et $\pi_2 : x - 2y + 2z + 45 = 0$ ainsi que la droite $d$ passant par $A(-3; 4; -5)$ de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les équations paramétriques de l'intersection de $\pi_1$ avec le plan $O_{xz}$.
2. Déterminer l'équation de la sphère $\Sigma_1$ tangente à $\pi_1$ et $\pi_2$ et dont le centre est situé sur $d$.
3. Déterminer le rayon du cercle $\Gamma$ d'intersection du plan $\pi_1$ avec la sphère $\Sigma_2$ d'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 8y - 13 = 0$.
4. (a) Montrer que $P(-3; 1; -5)$ est situé sur le cercle $\Gamma$.
   (b) Déterminer les équations paramétriques de la droite contenue dans $\pi_1$ tangente à $\Gamma$ en $P$.

## Problème 4

1. On considère l'endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}^2$ donné par la matrice $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ relativement à la base canonique.
   (a) Montrer que $f$ est bijectif.
   (b) Déterminer les valeurs propres de $f$ et les sous-espaces propres associés.
   (c) Calculer $A^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Soient les fonctions réelles définies par :
   $f : x \mapsto e^x \qquad g : x \mapsto e^{-x} \qquad h : x \mapsto \sinh(x) \qquad i : x \mapsto \cosh(x) \qquad j : x \mapsto \sinh(x+1)$
   et $E$ l'espace vectoriel engendré par $f$ et $g$.
   (a) Écrire $f$ puis $g$ comme combinaisons linéaires de $h$ et $i$.
   (b) Montrer que $\boldsymbol{\mathcal{B}}=(h; i)$ est une base de $E$.
   (c) Donner les composantes de $j$ dans la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

FIN