

## Examens de maturité 2019

Mathématiques normales

DF

5A, 5H, 5I, 5J, 5K

Version A

### Problème 1

Soit la fonction donnée par  $f(x) = (x - x^2)e^{1-x}$ .

- Faire l'étude complète de la fonction  $f$  et construire sa représentation graphique.
- Calculer l'aire totale du domaine borné limité par la courbe d'équation  $y = f(x)$  et l'axe  $O_x$ .

### Problème 2

Déterminer le volume maximal d'un cône dont l'apothème mesure 10 cm.

Commencer par montrer que ce volume vaut  $V(h) = \frac{\pi(100h - h^3)}{3}$ .

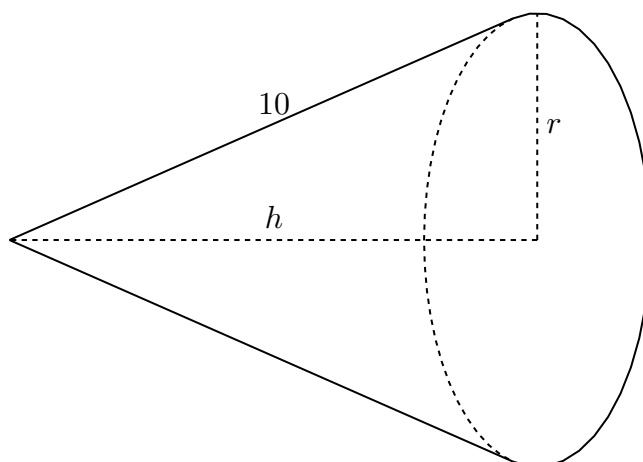


Fig. 1

### Problème 3

Dans le lac Léman, on trouve deux sortes de poissons. Les 60 % d'entre eux sont des corégones, les autres sont des perches.

Parmi tous ces poissons, le 30 % est constitué de mâles, mais cette proportion est d'un tiers chez les corégones.

- Montrer que la proportion de mâles chez les perches est d'un quart.
- Si je pêche un poisson et que celui-ci est une femelle, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un corégone ?
- Combien de poissons dois-je pêcher pour être sûr à 99 % d'avoir au moins une perche dans mon filet ?
- Si je pêche dix poissons, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un échantillon représentatif, c'est-à-dire qu'il y ait six corégones et quatre perches ?
- Les corégones pèsent 200 g et les perches 150 g. J'ai pêché 300 poissons aujourd'hui, mais je dois relâcher les mâles. Sachant que les corégones se vendent CHF 40.- le kilo et les perches CHF 60.- le kilo, à quelle recette puis-je m'attendre ?

### Problème 4

Dans l'espace  $\mathcal{E}_3$  muni d'un repère orthonormé, nous considérons le plan  $\alpha : x - 4y - 8z - 114 = 0$ , ainsi que les points  $A(2, -1, 10)$ ,  $B(5, -10, -12)$  et  $C(4, -6, -4)$ .

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AC)$ , puis calculer la distance de  $B$  à la droite  $(AC)$ .
- Déterminer l'équation du plan  $\beta$ , parallèle à  $\alpha$  et passant par  $B$ .
- Soit  $D$  la projection orthogonale de  $C$  sur  $\alpha$ . Calculer les coordonnées de  $D$ .
- Donner l'équation cartésienne de la sphère  $S$  de centre  $C$  et de rayon  $r = 9$ .
- Montrer que la sphère  $S$  et le plan  $\alpha$  sont sécants, puis donner le centre et le rayon de leur cercle d'intersection.
- Vérifier que le point  $B$  appartient à la sphère  $S$ . De plus, sachant que les points  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés, déterminer la position relative de la sphère  $S$  et du plan  $\beta$ .