

Examens de maturité 2008

Branche : Mathématiques renforcées DF

Version A

Exercice 1

Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}$ .

- Etudier et représenter graphiquement la fonction  $f$ .
- Déterminer l'aire  $A(t)$  de la surface limitée par le graphe de la fonction  $f$ , l'axe  $Ox$ , l'axe  $Oy$  et la verticale  $x=t$  où  $t > 0$ .
- Calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$ .

Exercice 2

Dans l'espace, muni d'un repère orthonormé, on considère

la droite  $d_1$  passant par  $A_1(0; -2; -1)$  et de vecteur directeur  $\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,

la droite  $d_2$  passant par  $A_2(1; -3; 5)$  et de vecteur directeur  $\vec{d}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,

la droite  $d_3$  passant par l'origine et de vecteur directeur  $\vec{d}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que l'équation du plan  $\alpha$  contenant  $d_2$  et parallèle à  $d_1$  est  $\alpha : x + y - 2z + 12 = 0$ .
- Déterminer la distance  $\delta(d_1; d_2)$ .
- Déterminer le point  $B$  projection orthogonale de  $A_2$  sur  $d_1$ .
- Déterminer le point  $C$  symétrique de  $A_1$  par rapport à  $\alpha$ .
- Déterminer l'équation de la sphère  $\Sigma$  centrée en  $A_1$  et tangente à  $\alpha$ .
- Déterminer les équations des sphères  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  tangentes à  $\alpha$  dont le centre est sur la droite  $d_3$  et dont le rayon est égal à  $\sqrt{6}$  (Indication : déterminer les points de  $d_3$  qui sont à distance  $\sqrt{6}$  de  $\alpha$ ).

Branche : Mathématiques renforcées DF

Version A

Exercice 3

On considère l'endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice est  $H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

- Déterminer le noyau et l'image de  $h$ .
- Effectuer un changement de base tel que relativement à la nouvelle base la matrice de  $h$  soit une matrice diagonale  $D$ .  
Ecrire la matrice  $D$  et la matrice  $P$  qui définit le changement de base.

Exercice 4

Pour imprimer ses questions de maturité un étudiant a deux photocopieuses à disposition : un modèle  $XR$  qu'il utilise dans le 60 % des cas et un modèle  $CN$ . Le modèle  $XR$  tombe en panne 1 fois sur 10, alors que le modèle  $CN$  tombe en panne 3 fois sur 10.

- L'élève veut effectuer un tirage, quelle est la probabilité
  - qu'il utilise le modèle  $XR$  et qu'il puisse faire ses photocopies (sans panne) ?
  - qu'il puisse faire ses photocopies ?
  - qu'il puisse effectuer son tirage sur  $XR$ , sachant que les deux photocopieuses fonctionnent normalement.
- Si le tirage de l'élève a été interrompu par une panne, quelle est la probabilité que l'élève ait tenté d'utiliser la machine  $CN$  ?

La  $CN$  étant hors service, il ne reste plus que la  $XR$  à disposition pour la suite du problème.

- On utilise la  $XR$  quatre fois ; calculer la probabilité qu'elle tombe en panne exactement deux fois.
- Calculer le nombre moyen de pannes sur la  $XR$  en quatre utilisations.
- Combien de fois faut-il utiliser la  $XR$  pour que la probabilité qu'elle tombe en panne au moins une fois soit supérieure à 75 % ?

Fin